Aplicações com Equações de Diferenças: Progressão Geométrica e Solução de Equação do Terceiro Grau

Éliton Meireles de Moura[1] Rosana Sueli da Motta Jafelice[2]

Faculdade de Matemática - FAMAT

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

38408-100, Uberlândia - MG

agosto de 2004

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o crescimento da população brasileira e da dinâmica das plantas sazonais. As ferramentas matemáticas utilizadas são as equações de diferenças, progressões geométricas e resoluções de equações de terceiro grau. Os dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) da população do Brasil são modelados através de equações de diferenças fornecendo previsões de populações futuras. A solução da equação de diferenças da propagação das plantas esta naturalmente associada a resolução de uma equação de terceiro grau, que é resolvida a partir dos seus coeficientes.

Palavras-chaves: Dinâmica Populacional, Equação de Terceiro Grau, Equações de Diferenças.

1 Introdução

A capacidade de previsão da ciência vem aumentando desde que o advento da mecânica newtoniana, em fins do século XVII, trouxe um aumento sem precedentes das suas possibilidades previsivas. Uma das características mais marcantes dessa revolução protagonizada pelo cientista inglês Isaac Newton foi a 'matematização da física': toda afirmação física deveria ser exprimível por meio de equações matemáticas e as conclusões seriam obtidas através da resolução dessas equações e da manipulação de expressões também matemáticas. Acredita-se que nessa parte da história não surgiu a modelagem matemática mas talvez nela tenha se utilizado essa ferramenta com consciência [6].

Muitos problemas que requerem uma análise na vida real se demostram extremamente complexos para que possamos analisar e determinar dados exatos a respeito da situação dada. De fato, problemas da vida real sofrem o efeito de diversas váriaveis, muitas das quais não conseguimos sequer mensurar. Contudo, utilizando as ferramentas matemáticas

[1]Orientando de Iniciação Científica PET-Matemática. E-mail: petmat06@ufu.br

[2]Professora orientadora. E-mail: rmotta@ufu.br

adequadas, podemos abordar um problema abstraindo-o para um problema mais simples com um número determinado de variáveis, que sejam mais representativas e exerçam maior influência no problema, as quais possamos determinar como se interagem entre si e como variam em função do tempo, se esse novo problema for suficiente para que possamos obter os dados necessários a nossa aplicação então obtemos um modelo matemático válido para a análise do problema. Diversas ferramentas da Matemática podem ser usadas nesse processo. Em particular, as equações diferenciais e equações de diferenças nos permitem modelar matematicamente quantidades que mudam continuamente no tempo. Dentre as diversas quantidades que mudam com o tempo, uma das situações mais significativas é o estudo das populações, o qual aparentemente segue regras desordenadas, contudo, através de uma série de abstrações e modelos que são válidos ora em uma determinada situação, ora em outra, demostraremos como é possível utilizar a Modelagem Matemática na resolução deste tipo de situação. Algumas ferramentas matemáticas foram utilizadas nos estudos das populações, inicialmente baseando-se em tabelas de dados das taxas de crescimento das populações no passado e estimativas futuras. A partir desses dados estatísticos e de uma modelagem adequada, é possível se prever taxas de crescimento futuras das populações em análise e assim, caso necessário, atuar no dimensionamento de recursos para essas populações ou no controle efetivo da mesma, caso o crescimento seja indesejável.

No estudo de plantas anuais, deve-se fazer o levantamento de dados através de contagem de sementes, porém, no nosso trabalho atuamos com taxas fictícias para compreensão do fenômeno.

Na próxima seção mostraremos os estágios do processo da modelagem matemática.

2 Modelagem Matemática

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual [6]. Na Figura 1 esquematizamos o processo de modelagem de uma situação real [7].

Iniciamos com um problema não matemático, alguma situação que necessite de entendimento e análise para que dele formulemos algum pensamento de resolução. O estágios da modelagem matemática são:

- **Experimentação**: É uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Neste estágio entendemos o problema detalhadamente.

- **Abstração**: É o procedimento que deve levar a formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase, procura-se estabelecer a *seleção das variáveis*, isto é, a distinção entre as variáveis de estado que descrevem a seleção de variáveis, a distribuição entre as variáveis de estado que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle que agem sobre o sistema. A *problematização* ou formulação aos problemas teóricos numa linguagem própria da área em que se está trabalhando, *Formulação de hipóteses*. De uma maneira geral, as hipóteses referem a freqüência da interrelação entre as variáveis, observada experimentalmente (hipóteses observacionais), mas também podem ser anunciadas de forma universal quando se procura

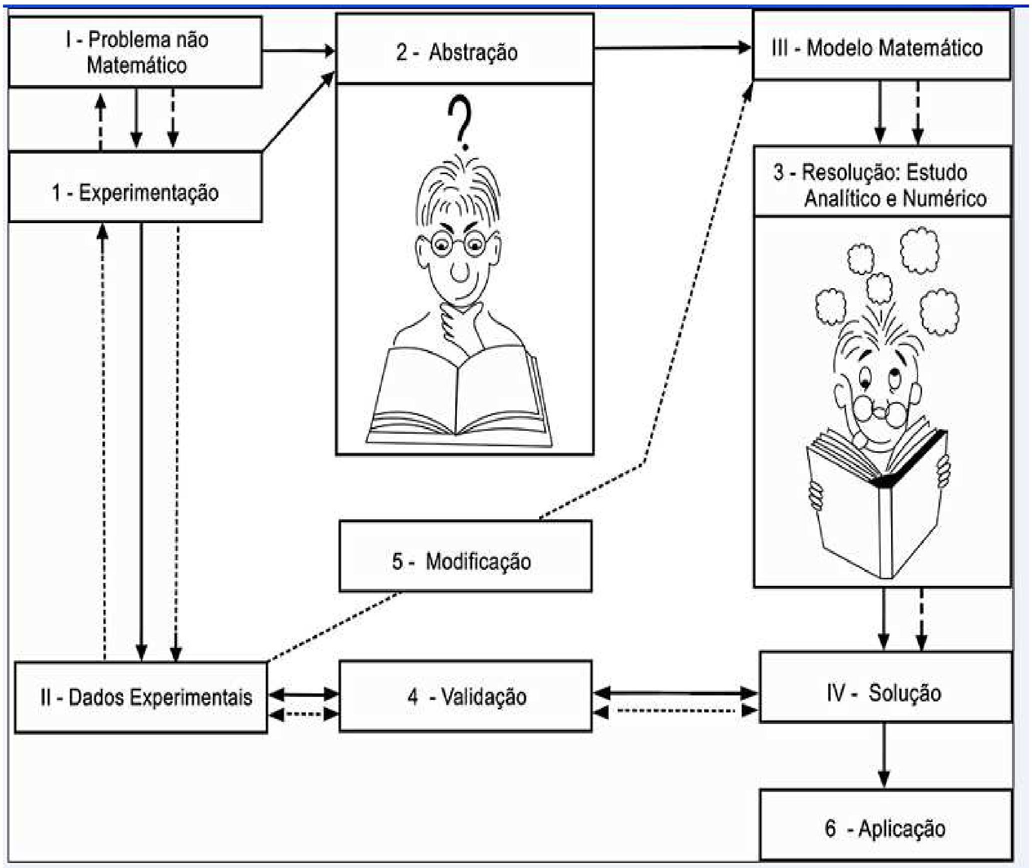

Figura 1: Cronograma de Modelagem [7]

generalizar os resultados investigados), e por último temos a *Simplificação*. Não são raras as situações em que o modelo dá origem a um sistema matemático que não apresenta a mínima possibilidade de estudo devido a complexidade. Neste caso a atitude será de voltar ao problema inicial e tentar restringir as informações incorporadas ao modelo a um nível que não desfigure irremediavelmente o problema original, mas que resulte num problema matemático tratável.

- **Resolução**: Neste estágio o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente, e como um dicionário, a linguagem matemática admite 'sinônimos' que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural. A resolução de modelos é uma atividade própria do matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada.

- **Validação**: É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação. E um último estágio, e caso ele exista, tem-se a Modificação.

- **Modificação** Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem as previsões corretas e definitivas. Também uma previsão pode estar errada ou discordar da intuição por força de algum erro ou um 'caminho errado' tomado pelo modelador. Assim será necessária a revisão do trabalho e nova tentativa de modelagem [6].

A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. Salientamos mais uma vez que a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido. Um modelo pode ser 'bom' para um biólogo e não para um matemático e vice-versa. Um modelo parcial pode atender as necessidades imediatas de um pesquisador mesmo que não comporte todas as variáveis que influenciam na dinâmica do fenômeno estudado.

Na próxima seção mostraremos uma primeira aplicação de equações de diferenças.

3 Crescimento Populacional

O IBGE, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, dentre muitas outras funções destina-se também a estudar e analisar o crescimento populacional brasileiro, regional ou não. Porém, devido ao alto custo e uma série de outros fatores, esse estudo, ou contagem populacional, é feito de maneira discreta, ou seja, de tempos em tempos. Geralmente, em um período de espaçamento de quatro anos é feita a contagem da população para determinar o crescimento populacional do país e utilizar esse dados para vários assuntos, discussões e projetos. Assim, matematicamente, o uso das equações de diferenças são adequadas para o estudo de crescimento populacional.

Seja P_n a quantidade da população em cada estágio n. Assim, iniciamos com P_o, a população inicial. Pela diferença da segunda população pela primeira resulta no crescimento (ou decrescimento, caso o sinal seja negativo) que o primeiro obteve neste intervalo [4].

Matematicamente significa:

$$P_1 - P_0 = xP_0 \tag{1}$$

Em que x representa a porcentagem de crescimento (ou decrescimento) de P_0. Assim, a equação (1) pode assumir a seguinte forma:

$$P_1 = (1+x)P_0 \tag{2}$$

Seguindo o mesmo raciocínio determinamos P_2. Pelo procedimento análogo, temos:

$$P_2 = (1+x)P_1 \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3), temos que:

$$P_2 = (1+x)^2 P_0$$

Se repetirmos o mesmo procedimento n vezes obtemos a equação (4) que é uma Progressão Geométrica dada por:

$$P_n = (1+x)^n P_0 \tag{4}$$

em que

- P_n é a população em cada estágio n.
- x é a taxa de crescimento (decrescimento).
- P_0 é a população inicial.

Substituindo $(1+x)$ por λ na equação (4), temos:

$$P_n = \lambda^n P_0 \tag{5}$$

4 O estudo das Equações de Diferenças no Crescimento Populacional Brasileiro

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para descrever o crescimento da população tanto do país todo como de determinadas regiões utiliza a linguagem das equações de diferenças. Quando afirma em [3]que, na década de 1991-2000, o Brasil cresce à taxa média anual de 1.64%, temos $\lambda = 1.0164$. Portanto, neste caso (5) pode ser escrita como:

$$P_n = (1.0164)^n P_0$$

Vamos esboçar o gráfico da equação (5) como mostra a Figura 2 (a) com $P_0 = 149926149$. Como λ é maior que 1 então a população cresce.

Estudamos outras hipóteses. A Figura 2 itens (b), (c) e (d) mostram o que ocorre com o número de habitantes de determinadas populações quando o valor de λ assume respectivamente, $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

O IBGE apresenta as Tabela 1 e Tabela 2. Observe que em [3] as estimativas da taxas de crescimento de 2004 a 2010 são diferentes. Vejamos como fazer para calcular a estimativa da população para 2010 utilizando equações de diferenças. Observe que:

$$P_1 - P_0 = 0.0126P_0 \tag{6}$$

onde P_0 é a população de 2004. Logo, $P_1 = 1.0126P_0$. Continuando o processo, concluímos que:

$$P_6 = (1,0126).(1,0124).(1,0122).(1,0119).(1,0116).(1,0112)P_0 \tag{7}$$

Fazendo este cálculo determinamos uma estimativa para a população brasileira em 2010, utilizando equações de diferenças, que é igual a 192380000, Figura 3. Este valor esta próximo da estimativa do IBGE na Tabela 2.

Generalizando a equação (7), temos que:

$$P_n = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n P_0 \tag{8}$$

2004 a 2005	2005 a 2006	2006 a 2007	2007 a 2008	2008 a 2009	2009 a 2010
1,26	1,24	1,22	1,19	1,16	1,12

Tabela 1: Taxas de crescimento da população em porcentagem [3].

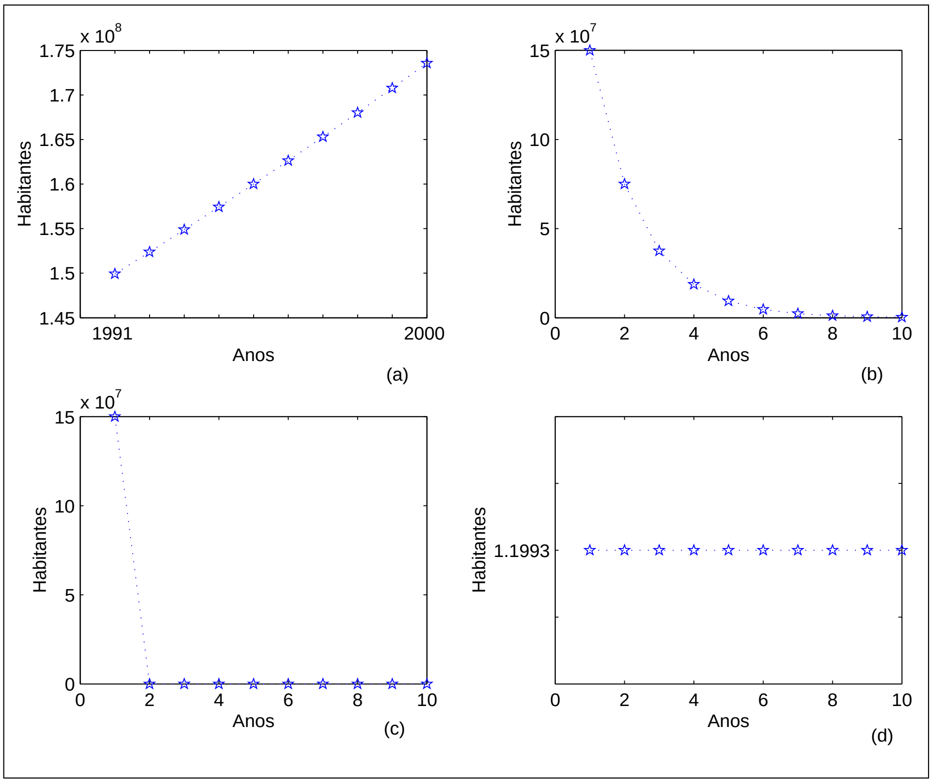

Figura 2: Estudo do comportamento da população dependendo da razão λ [4].

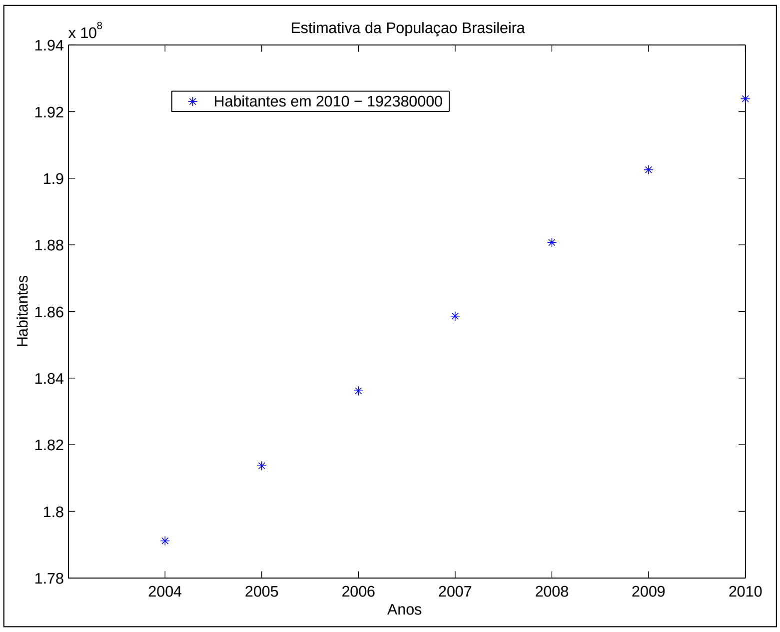

Figura 3: Estimativa da População Brasileira em 2010

2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
179113540	181341499	183554255	185738317	187885996	189990983	192040996

Tabela 2: Estimativas populacionais com data de referência em 01 de julho dos respectivos anos [3].

Porém, existem valores de λ que não podemos aplicá-los em número de habitantes de populações porque assumem valores negativos. Assim, existe uma curiosidade sobre as equações de diferenças. Elas podem ser aplicadas em Matemática Financeira. Veremos estes casos na próxima seção, com exemplos gráficos [4].

5 Equações de Diferenças em Economia

As equações de diferenças são muito utilizadas na área econômica, principalmente em juros simples e compostos. O raciocínio é análogo ao utilizado nas seções 3 e 4 para crescimento populacional, em outras palavras, o crescimento econômico pode ser considerado como o crescimento populacional da seguinte maneira. Substituindo-se as variáveis utilizadas anteriormente na equação (4) por variáveis conhecidas da área econômica e obtendo-se a equação:

$$FV = (1 + x)^n PV \tag{9}$$

onde

- FV (Valor Futuro) é o P_n.
- x é a taxa de juros.
- n representa o ano de capitalização.
- PV é o montante inicial (Valor Presente), ou seja, um valor inicial.

Neste caso, o Valor Futuro pode assumir valor negativo, por exemplo, quando se está devendo alguma quantia. Isto acontece quando λ assume os valores $\lambda = -1$, $-1 < \lambda < 0$ e $\lambda < -1$ e estes resultados são mostrados na Figura 4 itens (a), (b) e (c), respectivamente. Existem situações reais em que o dinheiro aplicado em algum tipo de negociação bancária ou, em situações mais comuns, no mercado de ações tem comportamentos semelhante aos gráficos da Figura 4.

6 Propagação de Plantas Anuais

Plantas anuais produzem sementes ao fim de cada verão. As plantas florescem germinam e morrem, deixando seu *material genético* nas sementes, que adormecem, e assim devem sobreviver durante o inverno para realizarem uma nova geração de plantas. A seguir, uma determinada fração destas sementes germinam. Outras sementes permanecem adormecidas por um ano ou mais, antes delas germinarem. Porém, de todas as sementes, existem aquelas que são perdidas, talvez por predadores, ou por estarem doentes ou mesmo pelo tempo. Mas para que as plantas sobrevivam como espécie, uma população suficientemente grande deve ser renovada anualmente.

Nesta seção, formulamos um modelo para descrever a propagação das plantas anuais. O principal problema na realização de tal estudo é o fato das sementes permanecerem

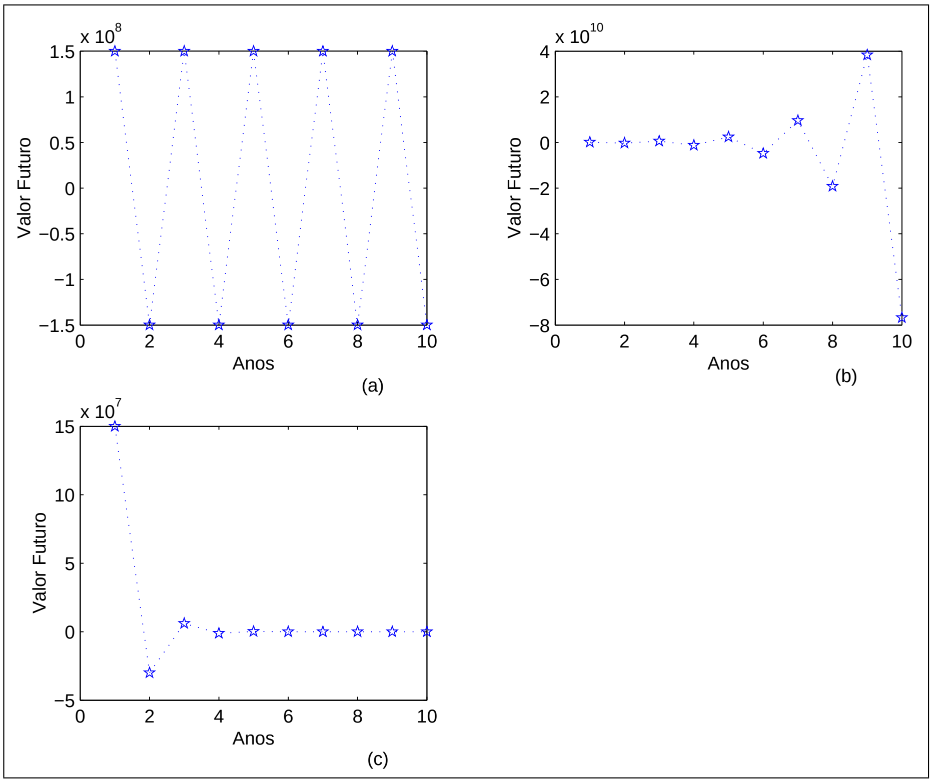

Figura 4: Estudo do comportamento da função dependendo da razão λ.

dormindo por diversos anos antes de germinarem. O problema requer assim que mantenhamos sistematicamente as populações das plantas e das reservas das sementes de cada idade no banco de sementes [6].

Estágio 1 - Indicação do problema

As plantas produzem sementes até o fim de seu crescimento (geralmente até o mês de agosto), depois disso morrem. Uma fração destas sementes sobrevivem ao inverno, e algumas dessas germinam até o começo da estação (por volta de maio), levando a uma nova geração de plantas. A fração que germina depende da idade das sementes.

Estágio 2 - Definições e Suposições

Primeiramente definimos todos os parâmetros e constantes especificados no problema. Em seguida definimos as variáveis. Neste estágio, observamos um esboço do problema na Figura 5, onde:

P_n = plantas na germinação n;
γ = número de sementes produzidas por planta em agosto;
α = fração de sementes com um ano de idade que germinaram em maio;
β = fração de sementes com dois anos de idade que germinaram em maio;
δ = fração de sementes com três anos de idade que germinaram em maio;
σ = fração de sementes que sobreviveram a um dado inverno.

Assim, determinamos a equação:

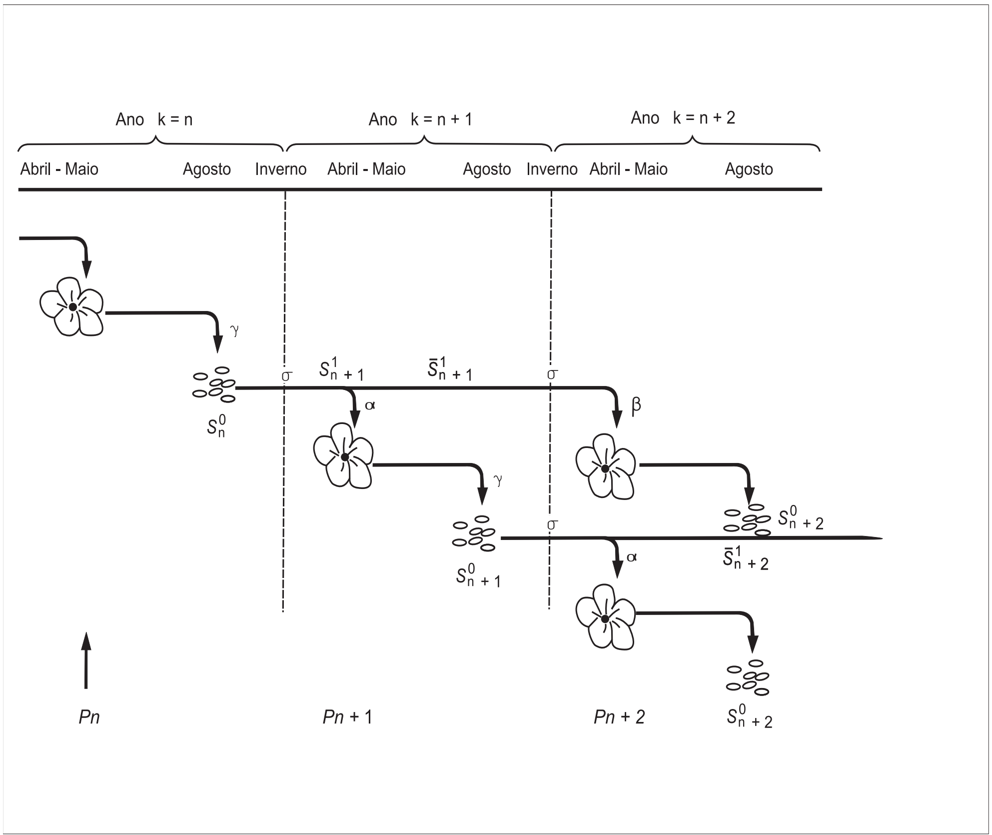

Figura 5: Modelo de plantas anuais [4].

$$P_n = \alpha\sigma\gamma P_{n-1} + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma P_{n-2} + \delta\sigma(1-\beta)\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma P_{n-3} \qquad (10)$$

Aqui, para simplificar, consideramos as frações constantes para todos os fenômenos ocorridos. Por exemplo: As sementes que sobreviveram três anos consecutivos necessariamente, tem a mesma fração de germinação. Nesse caso nos três anos as sementes sobreviveram com a mesma fração de germinação [7].

Para simplificar a equação (10) façamos:
$a = \alpha\sigma\gamma$
$b = \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma$
$d = \delta\sigma(1-\beta)\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma$.

Temos:

$$P_n = aP_{n-1} + bP_{n-2} + dP_{n-3} \qquad (11)$$

Substituindo $P_n = c\lambda^n$ em (11), obtemos:

$$c\lambda^n - ac\lambda^{n-1} - bc\lambda^{n-2} - dc\lambda^{n-3} = 0 \qquad (12)$$

Colocamos em evidência $c\lambda^{n-3}$ na equação (12), temos:

$$c\lambda^{n-3}(\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - d) = 0 \qquad (13)$$

Logo, $\lambda = 0$ ou $\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - d = 0$.

Para $\lambda = 0$, tem-se $P_n = 0$ para qualquer n (solução trivial), que só tem sentido se $P_0 = P_1 = P_2 = 0$.

Se $\lambda \neq 0$ então,

$$\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - d = 0 \tag{14}$$

Assim, dependendo dos parâmetros da equação (14) a população P_n cresce ou decresce, ou seja, como $P_n = c\lambda^n$, o comportamento de P_n depende de λ. Para $\lambda = 1$, temos a equação (14) com a seguinte forma:

$$1 = a + b + d \tag{15}$$

Substituindo os valores de a, b e d em (15), obtemos:

$$1 = \alpha\sigma\gamma + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma + \delta\sigma(1-\beta)\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma \tag{16}$$

Colocando o γ em evidência em (16), determinamos a equação:

$$1 = [\alpha\sigma + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma + \delta\sigma(1-\beta)\sigma(1-\alpha)\sigma]\gamma \tag{17}$$

Para simplificar substituimos $m = \alpha\sigma + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma + \delta\sigma(1-\beta)\sigma(1-\alpha)\sigma$ em (17). Assim, (17) é dada por:

$$\gamma = \frac{1}{m} \tag{18}$$

Interessa-nos que $\lambda > 1$, isto é , $\gamma > \dfrac{1}{m}$ logo, P_n cresce como mostra a Figura 6 (a).

Caso contrário, P_n decresce significando extinção, mostrado na Figura 6 (b).

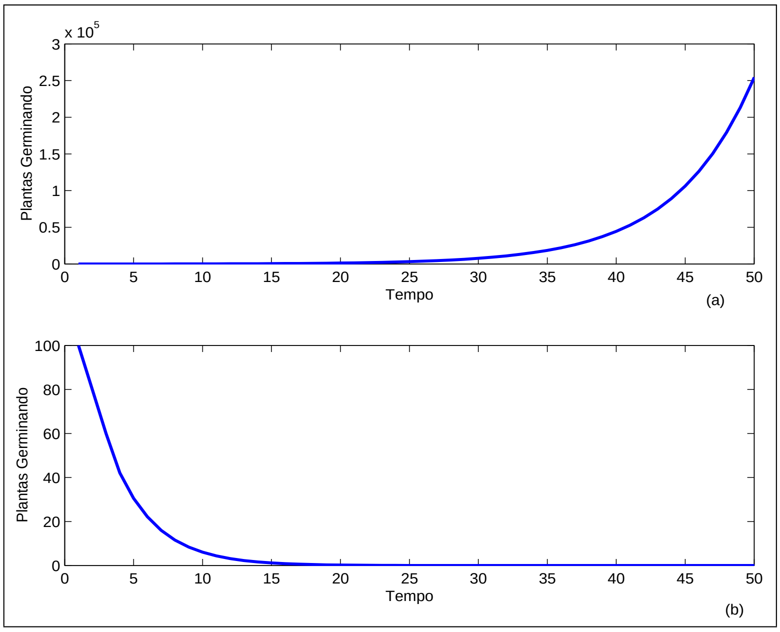

Figura 6: Gráfico da germinação das plantas.

Para determinar a solução do problema faz-se necessário encontrar as raízes da equação (14) de terceiro grau . Pois a solução da equação (11) é dada por:

$$P_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n$$

Na próxima seção determinamos as soluções de uma equação polinomial do terceiro grau, em termos dos seus coeficientes.

7 Soluções das Equações de Terceiro Grau

Dentro da história da Matemática as *equações polinomiais* são um dos assuntos mais relevantes. É conhecido que os babilônios utilizavam, por volta de 1800 A.C., alguns métodos de resolução de equações de segundo grau enquanto que os egípcios, na mesma época, apenas possuiam métodos de resolução do primeiro grau.

Os antigos gregos utilizavam métodos geométricos na resolução de algumas equações do 2º grau e até alguns tipos de equações cúbicas. Os hindus, no início da era cristã, ao contrário dos gregos empregam métodos aritméticos na resolução das equações, os quais foram desenvolvidos pelos árabes. Um dos mais significantes resultados desse período árabe é a solução da equação do 2º Grau pela fórmula de Báskara [1].

Apesar de tudo, as resoluções algébricas para as equações cúbicas eram desconhecidas. No fim do século XV e início do século XVI os matemáticos italianos, principalmente de Bologna, descobriram que a solução da equação cúbica poderia ser reduzida àquelas dos seguintes tipos: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$ (observe que essas distinções são decorrentes do não reconhecimento dos números negativos).

Spcípio del Ferro, e mais tarde Niccolo Fontana (conhecido como Tartaglia), descobriram as soluções daquelas equações. Os argumentos de Tartaglia foram apropriados e divulgados por Cardano em Ars Magna em 1545, que também divulgou o método de Ferrari de redução de uma equação de 4º grau para uma de terceiro grau [1].

Nosso objetivo é determinar as três soluções da equação do terceiro grau (19) a partir dos coeficientes desta equação.

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + d = 0 \tag{19}$$

Substituindo em (19) λ por $t - a/3$ ne equação (19), obtemos:

$$(t - a/3)^3 + a(t - a/3)^2 + b(t - a/3) + d = 0 \tag{20}$$

Fazendo manipulações algébricas segue que a equação (20) é equivalente à:

$$t^3 + (-((a^2)/3) + b)t + (((2/27)a^3) - ab/3 + d) = 0 \tag{21}$$

Podemos notar que o coeficiente do termo de segundo grau é igual a zero. Fazendo as substituições:

- $p = (-(a^2)/3) + b$
- $q = (((2/27)a^3) - ab/3 + d)$

A equação (21) se transforma em:

$$t^3 + pt + q = 0 \tag{22}$$

Motivados em determinar as soluções da equação (22), calculamos a expressão:

$$t = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

Onde x_1 e x_2 são raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ (e portanto satisfafem $x_1 + x_2 = S$ e $x_1 x_2 = P$) [8].

Isso fornece os seguintes cálculos:

$$t^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}\,[\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}]$$

$$t^3 = S + 3\sqrt[3]{P} \tag{23}$$

Assim, para determinarmos t temos que resolver uma equação do terceiro grau. Dessa forma, dada uma equação do terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do 2º Grau. Isso pode ser feito a partir das equações (19) e (23). Assim, determinemos os números P e S tais que:

$$\frac{-p}{3} = \sqrt[3]{P} \qquad q = -S$$

de forma que x_1 e x_2 são raízes da equação $x^2 - Sx + P = o$, e consequentemente $\sqrt[3]{x}_1 + \sqrt[3]{x}_2$ satisfaz a equação $t^3 + pt + q = 0$ [8].

Assim,

$$P = \frac{-p^3}{27}, \qquad S = -q$$

ou seja, x_1 e x_2 são raízes de $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$, isto é,

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad x_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \tag{24}$$

Seja $R = \dfrac{-q}{2}$ e $Q = \dfrac{p}{3}$, logo, a equação (24) é dada por:

$$x_1 = R + \sqrt{R^2 + Q^3}, \qquad x_2 = R - \sqrt{R^2 + Q^3}$$

donde,

$$t = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

satisfaz $t^3 + pt + q = 0$.

Vamos então definir z_1 e z_2 como sendo:

$$z_1 = \sqrt[3]{R + \sqrt{R^2 + Q^3}}, \qquad z_2 = \sqrt[3]{R - \sqrt{R^2 + Q^3}}$$

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação

$$\frac{-p}{3} = \sqrt[3]{P} \tag{25}$$

diz que o produto das duas raízes deve ser $\dfrac{-p}{3}$.

Assim,

$$z_1.z_2 = \frac{-p}{3} \tag{26}$$

Porém, sabemos que existem três valores como raízes, sendo que neste caso podem assumir valores complexos [1]. Se

$$w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

e substituindo se necessário, z_2 por wz_2 ou $w^2 z_2$ e z_1 por wz_1 ou $w^2 z_1$, temos:

$$z_1 w . z_2 w^2 = \frac{-p}{3} \qquad (27)$$

$$z_1 w^2 . z_2 w = \frac{-p}{3} \qquad (28)$$

Logo, as raízes cúbicas de $t^3 + pt + q = 0$, serão:

$$t_1 = z_1 + z_2 \qquad t_2 = wz_1 + w^2 z_2 \qquad t_3 = w^2 z_1 + wz_2 \qquad (29)$$

Em (29) temos as três raízes de $t^3 + pt + q = 0$, adicionamos $t = -\dfrac{a}{3}$ em t_1, t_2 e t_3 e obtemos as três raízes da equação (19) dadas especificamente por:

$$\begin{cases} \lambda_1 = z_1 + z_2 - \dfrac{a}{3} \\ \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - \dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{2} i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \\ \\ \lambda_3 = -\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - \dfrac{a}{3} - \dfrac{1}{2} i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \end{cases}$$

É importante ressaltar as observações que seguem:
Se a, b e d são números reais e se $D = Q^3 + R^2$ é o discriminante, então:

- uma raiz é real e duas são conjugadas complexas se $D > 0$;
- todas as raízes são reais e no mínimo duas são iguais se $D = 0$;
- todas as raízes são reais e destintas $D < 0$.

Se $D < 0$, o cálculo pode ser simplificado usando trigonometria:

$$z_1 = \sqrt[3]{R + i\sqrt{-D}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{R - i\sqrt{-D}}$$

Segue que:

$$z_1 + z_2 = \sqrt[3]{z} + \sqrt{\overline{z}}$$

onde $z = \sqrt[3]{R + i\sqrt{-D}}$
Pela primeira fórmula de Moivre [2] temos:

$$\sqrt[3]{z} = \rho^{\frac{1}{3}}(\cos(\frac{\theta}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3}))$$

$$\sqrt[3]{\bar{z}} = \rho^{\frac{1}{3}}(\cos(\frac{\theta}{3}) - i\sin(\frac{\theta}{3}))$$

Das equações anteriores segue que:

$$\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = 2\rho^{\frac{1}{3}}(\cos(\frac{\theta}{3}) = 2(-Q^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\cos(\frac{\theta}{3}) = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{\theta}{3})$$

Sabendo que:

$$z = R + i\sqrt{-D}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{R^2 - D} = \sqrt{R^2 - Q^3 - R^2} = \sqrt{-Q^3}$$

Se $D < 0$ a solução é:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{\theta}{3}) \\ \lambda_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{\theta}{3} + 120^0) \\ \lambda_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{\theta}{3} + 240^0) \end{cases}$$

onde $\cos\theta = \dfrac{-R}{\sqrt{-Q^3}}$, visto que:

$$z = \sqrt{-Q^3}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$R + i\sqrt{-D} = \sqrt{-Q^3}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Por consequência temos:

$$R = \sqrt{-Q^3}\cos\theta$$

Ou então:

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$$

Assim, temos também que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = b \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -d$$

Onde λ_1, λ_2, λ_3 são as três raízes da equação inicial de terceiro grau $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + d = 0$ que queríamos calcular.

Resumindo [5], dada a equação cúbica: $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + d = 0$, suas raízes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ expressas em termos dos coeficientes a, b e c são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = z_1 + z_2 - \dfrac{a}{3} \\ \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - \dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \\ \\ \lambda_3 = -\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - \dfrac{a}{3} - \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}(z_1 - z_2) \end{cases}$$

Onde:

$$Q = \frac{3b - a^2}{9} \qquad R = \frac{9ab - 27d - a^3}{54}$$

$$z_1 = \sqrt{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} \qquad z_2 = \sqrt{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Na próxima seção apresentaremos as conclusões do trabalho.

8 Conclusão

Neste trabalho realizamos um estudo do crescimento da população brasileira e da propagação de Plantas Anuais. Na Modelagem Matemática utilizamos como ferramenta as equações de diferenças, concluímos que o crescimento populacional brasileiro comporta-se como uma Progressão Geométrica. Com dados do IBGE pudemos estimar o futuro e analizarmos os gráficos gerados pelas equações de diferenças do modelo estudado mostrando também aplicações na Matemática Financeira.

Assim, constatamos que as equações de diferenças são uma ferramenta útil no estudo de estimativas de populações, dando resultados próximos do IBGE.

A modelagem da Propagação de Plantas Anuais por equações de diferenças nos leva a resolução de uma equação do terceiro grau. Concluímos que dependendo dos parâmetros da equação (14) temos a continuação ou a extinção da espécie.

Assim, concluímos o trabalho ressaltando a importância das equações de diferenças na modelagem matemática e visualizamos a realização de aplicações em outras áreas.

Referências

[1] A. Gonçalves. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides. IMPA.

[2] G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar -Complexos Polinômios Equações*. Atual Editora, 4^o edição.

[3] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. www.ibge.gov.br

[4] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. McGraw Hill, 1988.

[5] M. R. Spiegel. *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*. Coleção Schãum. Mc Graw -Hill.

[6] R. C. Bassanezi. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.* Editora Contexto, 2002.

[7] R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira Jr. *Equações Diferenciais com Aplicações.* Editora HARBRA, 1988.

[8] *Revista do Professor de Matemática.* v.25, 1994.